11.1 Euclid 空间

2024年3月28日 星期四 14:39

一. $\mathbb{R}^n$ (n维欧氏空间)的定义与结构

定义：所有有序 n元实数组 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 所组成的集合记为 $\mathbb{R}^n$

即 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_1, x_2, \cdots x_n \text{为实数}\}$

1. 代数结构

任取 $x \in \mathbb{R}^n$，可以把它看作 $\mathbb{R}^n$上一个点，

也可以把它看作 $\vec{0} = (0,0,0,0\cdots,0)$ 为起点，x为终点的一个向量

定义加法：$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

令 $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, \cdots x_n y_n)$

定义数乘：$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，$\forall x \in (x_1, \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n$ 令

$\lambda x = (\lambda x_1, \cdots \lambda x_n)$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ 是 $\mathbb{R}$上一个实线性空间，其中 $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$ 是它的零元素

2. 拓扑结构 (距离结构)

定义：$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, \cdots y_n) \in \mathbb{R}^n$

定义它们的欧氏距离 (以下简称距离) 为

$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$

可以证明：

(1) 非负性 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，有 $\rho(x,y) \geq 0$，且 $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

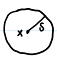
(2) 对称性 $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$，有 $\rho(x,y) = \rho(y,x)$

(3) 三角不等式 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^n$，有 $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

$\mathbb{R}^n$中的点集

$\mathbb{R}^n$中的任何一个子集，都称为 $\mathbb{R}^n$的一个点集

特别地 $\mathbb{R}^2$的子集称为平面子集



定义：$\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\forall \delta > 0$，令

$O(x, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(y, x) < \delta\}$ —— x 的 δ 邻域

x 称作该邻域的中心，δ 称作该邻域的半径

令 $O^*(x, \delta) = O(x, \delta) \setminus \{x\}$ —— x 的 δ 去心邻域

点与集合的关系

1. 称 x 是 E 的一个内点，若 $\exists \delta > 0$，使 $O(x, \delta) \subset E$
2. 称 x 是 E 的一个外点，若 $\exists \delta > 0$，使 $O(x, \delta) \cap E = \emptyset$
3. 称 x 是 E 的一个边界点，若 $\forall \delta > 0$，有

   $O(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$ 且 $O(x, \delta) \cap (\mathbb{R}^n \setminus E) \neq \emptyset$

E 的全体内点组成的集合称为 E 的内部，记作 E°，或 int E

E 的全体边界点组成的集合称为 E 的边界，记作 ∂E

注：E 的内点必属于 E

E 的外点必不属于 E

E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E

4. 称 x 为 E 的一个聚点，若 $\forall \delta > 0$，$O(x, \delta)$ 中有 E 中无穷多个点

   $\Updownarrow$

   $\forall \delta > 0$，$O^*(x, \delta) \cap E \neq \emptyset$

5. E 的全体聚点组成的集合，称为 E 的导集，记作 E'

   E 的聚点可能属于 E，也可能不属于 E

6. 称 x 为 E 的一个孤立点，若 $\exists \delta > 0$，使 $O(x, \delta) \cap E = \{x\}$

   $\Updownarrow$

   $x \in E$ 且 x 不是 E 的聚点

注：孤立点必是边界点

内点，非孤立的边界点必是聚点

定义：令 $\bar{E} = E \cup E'$ 称作 E 的闭包

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$

(1) 称 E 是 $\mathbb{R}^n$中的开集，如果 E 中每个点均是内点

即 $E^\circ = E$

(2) 称 E 是 $\mathbb{R}^n$中的闭集，如果 E 中每一个聚点都属于 E

即 $\bar{E} = E$

设 E 是 $\mathbb{R}^n$的子集，它在 $\mathbb{R}^n$中的补集 $\mathbb{R}^n \setminus E$ 记作 E^c

定理：E 是 $\mathbb{R}^n$中的闭集 $\Longleftrightarrow$ E^c 是 $\mathbb{R}^n$中的开集

证：($\Longrightarrow$) 若 E 为闭，则 $E' \subset E$

$\forall x \in E^c$，有 $x \notin E'$，故 $\exists \delta > 0$，使 $O^*(x, \delta) \cap E = \emptyset$

又 $x \notin E$，所以 $O(x, \delta) \cap E = \emptyset \Rightarrow O(x, \delta) \subset E^c$

于是 x 是 E^c 的内点，由 x 的任意性，E^c 是开集.

($\Longleftarrow$) $\forall x \in E^c$，由 E^c 开，$\exists \delta > 0$，使 $O(x, \delta) \in E^c$

性质：$\mathbb{R}^n$ 中的任一邻域都是开集

证：任取 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，任取 $r > 0$

要证：$O(x_0, r) = \{y : \rho(x_0, y) < r\}$，任取 $y \in (x_0, r)$

令 $r' = r - \rho(x_0, y)$，则 $0 < r' < r$，$O(y, r') \subset O(x_0, r)$

$\Rightarrow$ y 是 $O(x_0, r)$ 的内点.

三角不等式！

由性质可得：给定 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 及 $r > 0$

$\{(y_1, y_2, \cdots y_n) \in \mathbb{R}^n : (y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2 < r^2\}$ 是开集

类似可证：给定

$\{(y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n, y_i \in (a_i, b_i), 1 \leq i \leq n\}$ 是开集

其中 $a_1, \cdots a_n, b_1 \cdots b_n$ 是给定的实数且 $a_i < b_i$，$\forall 1 \leq i \leq n$

定理：(1) $\emptyset$ 与 $\mathbb{R}^n$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集

(2) 任意多个开集的并集是开集

(3) 任意有限个开集的交集是开集

(※ 无限个的情况并不成立)

(4) 任意多个闭集的交集是闭集

(5) 任意有限个闭集的并集是闭集

可以证明：$\mathbb{R}^n$的所有子集中，只有 $\emptyset$ 与 $\mathbb{R}^n$ 是既开又闭的

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若 $\exists r > 0$，使 $E \subset O(\vec{0}, r)$

则称 E 是 $\mathbb{R}^n$的一个有界集.

性质：E 是 $\mathbb{R}^n$ 的有界集

$\Longleftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$，$\exists r_x > 0$ (令 $r_x = \rho(x, \vec{0}) + r$) 使 $E \subset O(x, r_x)$

$\Longleftrightarrow$ $\exists x_0 \in \mathbb{R}^n$，$\exists r_0 > 0$ 使 $E \subset O(x_0, r_0)$

$\Longleftrightarrow$ $|E| < +\infty$，其中

$|E| = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in E\}$

定义：给定 $\mathbb{R}^n$ 中的一个序列 (也称点列) $\{x_m\}$，设 $a \in \mathbb{R}^n$

如果：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M \in \mathbb{Z}^+$，当 $m > M$ 时，有 $\rho(x_m, a) < \varepsilon$

就称 a 是 $\{x_m\}$ 的一个极限，记作

$a = \lim_{m \to \infty} x_m$ (或 $x_m \to a$ ($m \to \infty$))

也称 $\{x_m\}$ 收敛于 a

如果 $\forall a \in \mathbb{R}^n$，都有 $\{x_m\}$ 不收敛于 a，则称 $\{x_m\}$ 发散

性质1：收敛序列的极限是唯一的

性质2：设 $\mathbb{R}^n$中的两个序列 $\{x_m\}$ 与 $\{y_m\}$ 都收敛，且极限

分别为 a 与 b，则 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$，有序列 $\{\alpha x_m + \beta y_m\}$ 收敛.

且 $\lim_{m \to \infty} (\alpha x_m + \beta y_m) = \alpha a + \beta b$

性质3：收敛序列 $\{x_m\}$ 必是有界的，即 $\exists k > 0$，使得 $\forall m \geq 1$

有 $x_m \in O(\vec{0}, k)$

性质4：设 $\{x_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个序列，且 $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots x_n^{(m)})$

设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

则 $\lim_{m \to \infty} x_m = a \Longleftrightarrow \forall 1 \leq i \leq n$，有 $\lim_{m \to \infty} x_i^{(m)} = a_i$ (反证法)

定理：若 $E \subset \mathbb{R}^n$，$x \in \mathbb{R}^n$，则 $x \in E'$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ 点列 $\{x_m\} \subset E \setminus \{x\}$，使得 $x = \lim_{m \to \infty} x_m$

定义：设 $\{x_m\} \subset \mathbb{R}^n$，称它是柯西序列 (或基本序列)

若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M \in \mathbb{Z}^+$，当 $m, k > M$ 时有 $\rho(x_m, x_k) < \varepsilon$

定理 (柯西收敛准则) $\mathbb{R}^n$中的序列 $\{x_m\}$ 是收敛的 $\Longleftrightarrow$ $\{x_m\}$ 是柯西序列

"$\Rightarrow$" ✓ ($\rho(x_m, x_k) \leq \rho(x_m, a) + \rho(x_k, a)$)

"$\Leftarrow$" 记 $x_m = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \cdots, x_n^{(m)})$，$m \geq 1$

$\forall 1 \leq i \leq n$，由于 $|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| \leq \rho(x_m, x_k)$

所以由 $\{x_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的柯西序列

可得 $\{x_i^{(m)}\}$ 是 $\mathbb{R}$中的柯西序列，利用实数集的柯西收敛准则，

必有 $\{x_i^{(m)}\}_{m \geq 1}$ 收敛，记其极限为 a_i

令 $a = (a_1, \cdots, a_n)$ 有 $\lim_{m \to \infty} x_m = a$

闭集套定理：设 $\{E_m\}_{m \geq 1}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一列非空闭集，且满足

(1) $\forall m \geq 1$，$E_{m+1} \subset E_m$

(2) $\lim_{m \to \infty} \mathrm{diam}(E_m) = 0$

则 $\exists!$ $a \in \mathbb{R}^n$，使 $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$

证：唯一性显然成立，若 $\exists a, b \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$，则 $\rho(a, b) \leq \mathrm{diam}(E_m)$ $\forall m$

故 $\rho(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$

存在性 $\forall m \geq 1$ 任取定 $x_m \in E_m$ (从每个闭集套中各取一个点，说明其为柯西点列)

由于当 $m > n$ 时，必有 $x_m, x_k \in E_k$，从而 $\rho(x_m, x_k) < \mathrm{diam}(E_k)$

由(2)，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M \in \mathbb{Z}^+$，当 $m > M$ 时，有 $\mathrm{diam}(E_m) < \varepsilon$

从而当 $m > k > M$ 时，有 $\rho(x_m, x_k) \leq \mathrm{diam}(E_k) < \varepsilon$

从而 $\{x_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个柯西序列

由柯西收敛准则，可知 $\{x_m\}$ 收敛，其极限为 a

$\forall m \geq 1$，令 $S_m = \{x_k, k \geq m\}$ ($\subset E_m$)

(1) 若 S_m 为有限集，则 $\exists L \geq m$，$\exists$ 单调正整数列 $\{k_i\}_{i \geq 1}$ 使 $x_{k_i} = x_L$ ($\forall i \geq 1$)

从而 $a = \lim_{i \to \infty} x_{k_i} = x_L \in S_m \subset E_m$

(2) 若 S_m 为无限集，则 $a \in S_m' \subset E_m'$

由 E_m 是闭集，可得 $a \in E_m$

于是有：$\forall m \geq 1$，$a \in E_m$，从而 $a \in \bigcap_{m=1}^{\infty} E_m$

定理：$\mathbb{R}^n$中的任一有界点列必有收敛子列

证：以二维情形为例

设 $\{(x_m, y_m)\} \subset \mathbb{R}^2$ 有界点列

则 $\{x_m\}$ 为 $\mathbb{R}$中的有界点列，从而存在收敛子列 $\{x_{m_k}\}$

$\{y_{m_k}\}$ 为 $\mathbb{R}$中的有界点列，从而存在收敛子列 $\{y_{m_{k_i}}\}$

则收敛子列为 $\{x_{m_{k_i}}, y_{m_{k_i}}\}$

聚点定理：$\mathbb{R}^n$中的有界无限点集必存在一个聚点.

证：任取 $x_1 \in S$.

取 $x_2 \in S \setminus \{x_1\}$

⋮

一般地 取 $x_{m+1} \in S \setminus \{x \quad , \cdots x_m\}$，$m \geq 1$

则 $\{x_m\}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一个有界点列，存在收敛点列，收敛于 a.

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$，$\{V_i\}_{i \in I}$ 是 $\mathbb{R}^n$中的一族开集，若 $E \subset \bigcup_{i \in I} V_i$

则称 $\{V_i\}_{i \in I}$ 为 E 的一个开覆盖

定义：设 $E \subset \mathbb{R}^n$，若 E 的任意一个开覆盖 $\{V_i\}_{i \in I}$，都可以找到

$i_1, i_2, \cdots i_k \in I$，使 $E \subset \bigcup_{j=1}^{k} V_{i_j}$，则称 E 是 $\mathbb{R}^n$中的一个紧集

定理：设 $E \subset \mathbb{R}^n$，则以下三个命题等价

(1) E 是 $\mathbb{R}^n$中的有界闭集

(2) E 是 $\mathbb{R}^n$中的紧集

与1维类似

(3) E 的任意无限子集在 E 中有聚点

($\Longleftrightarrow$ $\forall \{x_m\} \subset E$，$\exists$ 收敛子列 $\{x_{m_k}\}$，使 $\lim_{k \to \infty} x_{m_k} \in E$)

$\Rightarrow$ x不是 E 的聚点

故若E有聚点必在E中 $\Rightarrow$ E闭

11.2 多元连续函数

2024年4月2日 星期二 11:43

定义:(多元函数) 设 $D\subset\mathbb{R}^n$,设 f 是 D 到 $\mathbb{R}$ 的一个映射,则称 f 是一个 n 元函数,常写作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

或

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad (x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$$

称 D 为 f 的定义域

称 $f(D)=\{f(x):x\in D\}$ 为 f 的值域

称 $\Gamma f=\{(x,f(x)):x\in D\}$ 为 f 的图像

若 $f(D)$ 有界,则称 f 为有界函数,不然称 f 为无界函数

对于二元函数与三元函数

常把 $f(x_1,x_2)$ 写为 $f(x,y)$

$f(x_1,x_2,x_3)$ 写为 $f(x,y,z)$

注:若 f 由公式法表出,如果不特别指出,定义域 D 即为 f 的存在域

定义: 设 $D\subset\mathbb{R}^n$, $x_0\in D'$ $f:D\to\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$

称 f 在 D 上当 x 趋于 x_0 时,以 a 为极限,若

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $x\in D^*(x_0,\delta)\cap D$ 时,有

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}}f(x)=a$ 或简化为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ (1)

若 $x_0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$,则(1)式也可写作:

$$\lim_{(x_1,x_2,\cdots x_n)\to(x_1^{(0)},\cdots x_n^{(0)})}f(x_1,\cdots x_n)=a$$

注:在定义域中,$D^*(x_0,\delta)\cap D$ 可换作

$\{(x_1,\cdots x_n): |x_i - x_i^{(0)}|<\delta,\ 1\le i\le n$ 且 $(x_1,\cdots,x_n)\in D\setminus\{x_0\}\}$

—— x_0 的 δ 去心方邻域 $\cap D$

性质：(类似于数列极限的子列定理) 设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$f:D\to\mathbb{R}$，$x_0\in D'$，$a\in\mathbb{R}$，则

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)=a \iff \forall E\subset D,\ \text{若 } x_0\in E',\ \text{则} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in E}} f(x)=a$$

推论1：设 $E_1\subset D$，且 $x_0\in E_1'$，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in E}} f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ 不存在

推论2：设 $E_1, E_2\subset D$，且 $x_0\in E_1'\cap E_2'$，若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in E_i}} f(x)=a_i\ (i=1,2)$

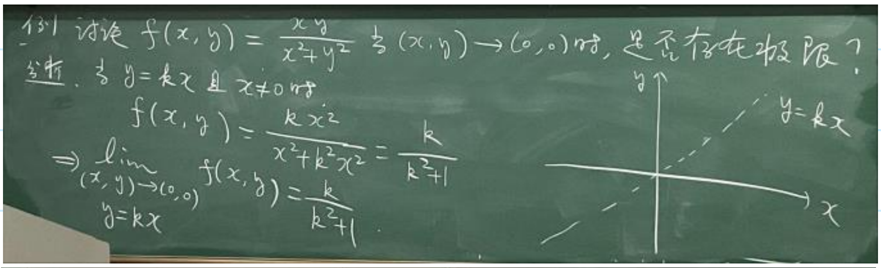
且 $a_1\ne a_2$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ 不存在

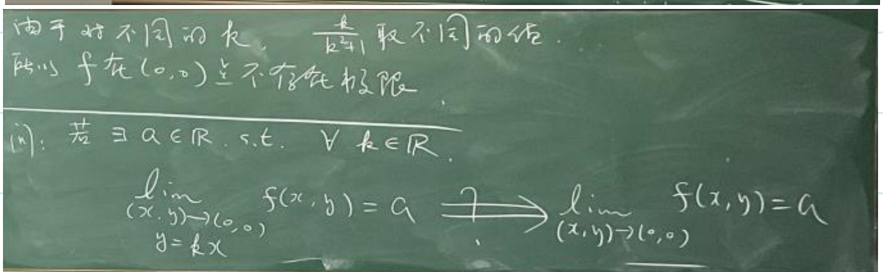
推论3：极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)$ 存在

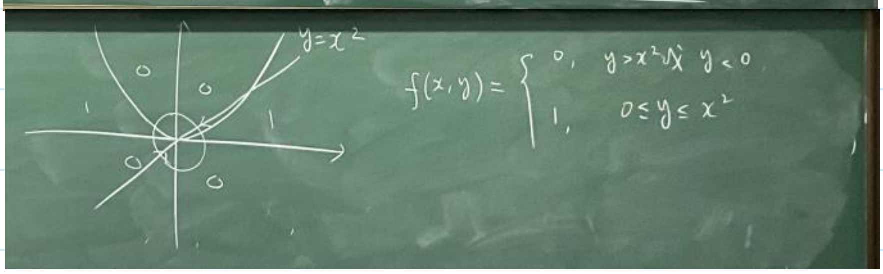
$\iff$ 任意 D 中满足条件 $x_m\ne x_0\ (\forall m)$ 且 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x_0$

的序列 $\{x_m\}$，都有 $\{f(x_m)\}$ 收敛

对应于归结原则







定义：称 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)=+\infty$，若

$\forall M>0, \exists \delta>0$, 当 $x\in U^*(x_0,\delta)\cap D$时, 有 $f(x)>M$

定义: 称 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,+\infty)} f(x,y)=A\in\mathbb{R}$, 若:

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $|x|<\delta$ 且 $y>\frac{1}{\delta}$ 时, 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

累次极限

定义: 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为开集, $(x_0,y_0)\in D$, 设 $f(x,y)$ 在 $D\setminus\{(x_0,y_0)\}$上有定义.

若 $\exists\delta>0$, $\forall y\in U^*(y_0,\delta)$ 极限

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

都存在, 记其为 $\varphi(y)$, 若进一步, 极限

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

也存在, 则把该极限称为$f(x,y)$在点(x_0,y_0)处先令

$x\to x_0$, 再令 $y\to y_0$ 的累次极限, 记作

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)$$

类似地, 可定义另一个累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$

※ 例: 两个累次极限存在. 重极限不存在 $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

※ 例: 重极限存在, 两个累次极限不存在. $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & x\neq0 \text{ 且 } y\neq0 \\ 0, & x=0 \text{ 或 } y=0\end{cases}$

※ 例: 两个累次极限均存在, 但不相同 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$

定理: 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为开集 $(x_0,y_0)\in D$, f在$D\setminus\{x_0,y_0\}$ 上有定义

若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与其中一个累次极限都存在, 则

它们必然相等.

证: 令 $A=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

证：令 $A=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

不妨设累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在

由重极限存在，可知 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $(x,y)\in O^*((x_0,y_0),\delta)$ 时

有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ (1)

由累次极限 (*) 存在，当 $\delta'\in(0,\delta)$，使 $\forall y\in O^*(y_0,\delta')$ 有

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y) \text{ 存在}$$

从而 $\forall y\in O^*(y_0,\delta')$，令 $x\to x_0$，由 (1) 可得 $|\varphi(y)-A|\le\varepsilon$

故 $\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$ 于是 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=A$

推论 1：若 $f(x,y)$ 与点 (x_0,y_0) 处的重极限与两个累次极限均存在，则三者相等

推论 2：若 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个累次极限均存在但不相等，则重极限不存在

多元函数的连续性．

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}$，$x_0\in D$

称 f 在点 x_0 连续，若

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in O(x_0,\delta)\cap D$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

注：若 x_0 是 D 的孤立点，则 f 在点 x_0 连续．

若 $x_0\in D\cap D'$，则 f 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (2)

定义：称 f 在集合 D 上连续，如果 $\forall x\in D$，有 f 在 x 连续

类似地，可定义不连续点（间断点）（若 $x_0\in D'$ 且 (2) 式不成立）

例 设 $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$. 证明该函数在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

证 $\forall (x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|$$

$|\sin u-\sin v|\le|u-v|$ 　　三角不等式

$$\le\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_0^2+y_0^2}\right|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\rho((x,y),(x_0,y_0))$$

因此, $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$. 则当 $(x,y)\in O((x_0,y_0),\delta)$ 时, 有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|<\delta=\varepsilon$$

从而 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

由 (x_0,y_0) 的任意性, 可得 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续.

例 计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解: 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\ln(x+e^y)}{\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln 2}{1}=\ln 2$

例 计算极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解. 利用 $\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, 所以

原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin\left[(y+1)\sqrt{x^2+y^2}\right]}{(y+1)\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(y+1)=1\cdot1=1$

若 $f: D\subset\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $(x_0,y_0)\in \operatorname{int} D$

令 $\varphi(x)=f(x,y_0)$, $\psi(y)=f(x_0,y)$

则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续

$\Longrightarrow$ $\varphi(x)$ 在点 x_0 连续, $\psi(y)$ 在点 y_0 连续 (定义可得)

$\not\Longleftarrow$ 例: $f(x,y)=\begin{cases}0, & 若\ x=0\ 或\ y=0\\ 1, & 其它\end{cases}$

向量值函数

定义: 设 $D\in\mathbb{R}^n$, 设 f 是 D 到 $\mathbb{R}^m$ 上的一个映射, 则称 f 是一个 n 元的向量值函数.

常写作: $f: D\longrightarrow\mathbb{R}^m$

$$x=(x_1,\cdots x_n)\longmapsto z=(z_1,\cdots z_m)$$

称 D 为 f 的定义域, 称 $f(D)=\{f(x): x\in D\}$ 为 f 的值域

当 $m=1$ 时, f 为多元函数

记 $\vec{e}_i=(0,0,\cdots,1,0,\cdots,0)\in e^m$

当$m=1$时，f为多元函数

记 $\vec{e}_i=(0,0,\cdots,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{第}i\text{个位置}}}{1},0,\cdots,0)\in E^m$

令 $f_i(x)=f(x)\cdot\vec{e}_i$ 称其为f的第i个分量函数

即 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$

11.3 连续函数的性质

2024年4月13日 星期六 13:54

设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}^m$ $x_0\in D'$ $A\in\mathbb{R}^m$

- 称 f 在点 x_0 的极限为 A，(也称：当 x 趋于 x_0 时，f 的极限为 A)

  如果：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x\in \mathring{O}(x_0,\delta)\cap D$ 时，有

  $$|f(x)-A|<\varepsilon$$

  记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

- 称 f 在点 x_0 处连续 如果：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，

  当 $x\in O(x_0,\delta)\cap D$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

  若 f 在 D 上的任一点均连续，则称 f 在 D 上连续.

定理：设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$f: D\to\mathbb{R}^m$，$x_0\in D$

则 f 在点 x_0 连续当且仅当 f 的所有分量函数 $f_1,\cdots,f_m$ 都在点 x_0 连续

定义：设 $D\subset\mathbb{R}^n$，$\Omega\subset\mathbb{R}^k$ 设 $g: D\to\mathbb{R}^k$，$f:\Omega\to\mathbb{R}^m$

如果 $g(D)\subset\Omega$，则可定义 $(f\circ g)(x)=f(g(x))$，$x\in D$

称其为 f 与 g 的复合函数

定理：设 $x_0\in D$，$y_0=g(x_0)$，若 g 在点 x_0 连续，且 f 在点 y_0 连续，

则 $f\circ g$ 在点 x_0 连续

证：$\forall\varepsilon>0$，由 f 在点 y_0 连续，$\exists\tau>0$，当 $y\in O(y_0,\tau)\cap\Omega$ 时，有

$$|f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$$

又由 g 在点 x_0 连续，且 $y_0=g(x_0)$，所以对上述取定的 $\tau>0$，$\exists\delta>0$

当 $x\in O(x_0,\delta)\cap D$ 时，有 $|g(x)-y_0|<\tau$

从而此时 $g(x)\in O(y_0,\tau)$

又由 $g(D)\subset\Omega$，所以当 $x\in O(x_0,\delta)\cap D$ 时，有

$$g(x)\in O(y_0,\tau)\cap\Omega.$$

从而有 $|f(g(x))-f(g(x_0))|=|f(y(x))-f(y_0)|<\varepsilon$

于是 $f\circ g$ 在点 x_0 收敛

定理：设 $E\subset\mathbb{R}^n$，则 E 是 $\mathbb{R}^n$ 的紧集，当且仅当 E 中任一点列 $\{x_m\}$，都存在子列 $\{x_{m_k}\}$，收敛于 E 中的某个点.(即 E 是列紧集) 紧集 $\Leftrightarrow$ 列紧集

都存在子列 $\{x_{m_k}\}$，收敛于 E 中的某个点.（即 E 是列紧集）紧集 $\Leftrightarrow$ 列紧集

定理：设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$f:E\to\mathbb{R}^m$ 连续. 若 E 是紧集，则 $f(E)$ 也是紧集

证：任意 $f(E)$ 中的任一点列 $\{y_m\}$

则 $\forall m\ge 1$，$\exists x_m\in E$，使 $y_m=f(x_m)$

由 E 紧，从而列紧，$\exists\{x_m\}$ 的子列 $\{x_{m_k}\}$，使它收敛于 E 的某个点，

记 $x^*=\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}$，则 $x^*\in E$

由于 f 在点 x^* 连续，所以

$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{m_k})=f(x^*)$ 即 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{m_k}=f(x^*)$

由 $f(x^*)\in f(E)$，所以 $f(E)$ 是列紧集，从而是紧集

定义：设 $E\subset\mathbb{R}^n$，$f:E\to\mathbb{R}$. 称 f 在 E 上一致连续，如果：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in E$，只要 $\rho(x_1,x_2)<\delta$，就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

定理：设 $E\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集. $f:E\to\mathbb{R}$ 连续，则 f 在 E 上是一致连续的

证：$\forall\varepsilon>0$，$\forall x\in E$，由 f 在点 x 连续，$\exists\delta_x>0$，当 $x'\in O(x,\delta_x)\cap E$ 时，

有 $|f(x')-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$

注意到 $\{O(x,\frac{\delta_x}{2}):x\in E\}$ 是 E 的一个开覆盖，从而由 E 是紧集

存在 $x_1,x_2,\cdots x_k\in E$ 使

$$E\subset\bigcup_{i=1}^{k}O(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2})\qquad(3)$$

令 $\delta=\min\{\frac{\delta_{x_i}}{2},1\le i\le k\}$，则 $\delta>0$

任取 $x',x''\in E$，若 $\rho(x',x'')<\delta$，由(3)式，$\exists 1\le i\le k$ 使

$$x'\in(x_i,\frac{\delta_{x_i}}{2})$$

从而 $\rho(x'',x_i)\le\rho(x'',x')+\rho(x',x_i)$

$$<\delta+\frac{\delta_{x_i}}{2}\le\delta_{x_i}$$

因此 $x',x''\in O(x_i,\delta_{x_i})\cap E$，从而有

$$|f(x')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2},\quad|f(x'')-f(x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

故 $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

思路：让 x',x'' 落在同一个 $O(x_i,\delta_i)$ 中

定义：设$A,B\subset\mathbb{R}^n$，称A与B是分离的，如果：

$$\overline{A}\cap B=\emptyset \text{ 且 } A\cap\overline{B}=\emptyset$$

定义：设$E\subset\mathbb{R}^n$，若存在E的两个非空子集A,B，使$A\cup B=E$

且A与B是分离的，则称E是不连通的

定义：设$E\subset\mathbb{R}^n$，若E不是不连通的，则称E是连通的

定义：设$E\subset\mathbb{R}^n$，设E中任意两点，可以用完全含于E的一条有限折线段（由有限条直线段连接而成的折线）相连接，则称E是折线连通的

定义：设$E\subset\mathbb{R}^n$，若连续映射

$$\gamma:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}^n$$

满足$\gamma([0,1])\subset E$，则称γ是E中的一条道路，

$\gamma(0)$与$\gamma(1)$分别称为道路γ的起点与终点

若集合E中任意两点x与y，都存在E中一条道路γ，使得

$\gamma(0)=x$ 且 $\gamma(1)=y$，则称E是道路连通的

注：(1) 折线连通$\Longrightarrow$道路连通$\Longrightarrow$连通

(2) 若$E\subset\mathbb{R}$，则E是连通的$\Longleftrightarrow$E是区间

E是连通紧集$\Longleftrightarrow$E是有界的闭区间

定义：若$E\subset\mathbb{R}^n$，假设E是连通的开集，则称E是$\mathbb{R}^n$的一个开区域，简称区域

开区域的闭包称为闭区域

性质：设E是$\mathbb{R}^n$的子集，则E是连通的开集$\Longleftrightarrow$E是折线连通的开集

（$\Longleftrightarrow$ E是道路连通的开集）

定理：连续映射将连通集映射为连通集

（道路连通集）（道路连通集）

推论：连续函数将连通的紧集映射为有限的闭区间

特别地 此时连续函数具有介值性

11.4 直线方程与平面方程

2024年4月13日 星期六 14:06

直线与平面方程补...

直线方程与平面方程补充

1. 外积(与混合积)

定义 给定 $n\in\mathbb{Z}^+$, 对于 $1\le i\le n$, 记

$$\vec{e_i}=(0,\cdots,0,\underset{\substack{\uparrow\\ \text{第}i\text{个位置}}}{1},0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n.$$

称 $\{\vec{e_1},\vec{e_2},\cdots,\vec{e_n}\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基.

此时, $\forall\ \vec{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\vec{x}=\sum_{i=1}^{n}x_i\vec{e_i}.$$

定义 给定 $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\in\mathbb{R}^3$.

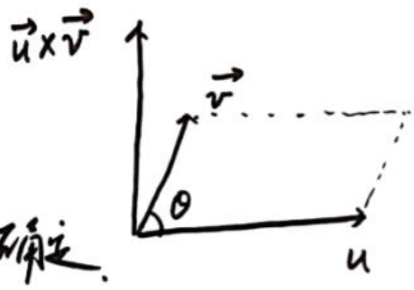
定义 $\vec{u}$ 与 $\vec{v}$ 的外积为

$$\vec{u}\times\vec{v} \underline{\underline{\text{形式上}}} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{e}_1+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{e}_2+\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{e}_3$$

$$=\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right).$$

$$\left(\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)$$



外积具有以下性质:

方向: $\vec{u}\times\vec{v}$ 与 $\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 都正交. 由右手法则确定.

(注: 假定 $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ 是右手系)

大小: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\sin\theta=$ 如图平行四边形的面积.

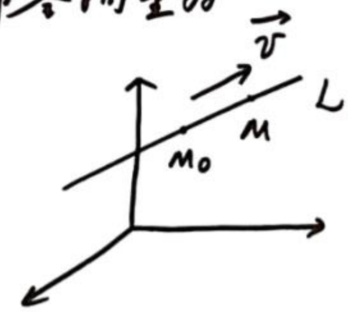
(即: $|\vec{u}\times\vec{v}|^2+|\vec{u}\cdot\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2$, 可直接按定义代入验证)

定义. 设 $\vec{w}=(x_3,y_3,z_3)$. 定义 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 和 $\vec{w}$ 的混合积为

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

2. $\mathbb{R}^3$中的直线方程

· 给定一条直线L，称平行于L的任一非零向量为L的方向向量.



为确定直线L的方程，有如下方法：

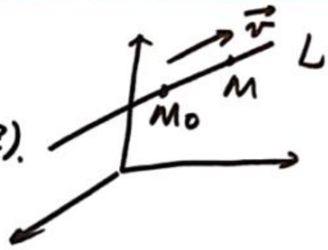
已知L中的一点M_0与方向向量$\vec{v}$.

此时$\forall M\in L$，有$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{v}$.

于是L的方程可写为：$M=M_0+t\vec{v},\ t\in\mathbb{R}$ —— 参数方程

~~若$M_0=$~~

$(M=M_0+t\vec{v},\ t\in\mathbb{R})$



若$M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$\vec{v}=(l,m,n)$，$M=(x,y,z)$.

则L的方程可写成

$$\begin{cases} x=x_0+tl, \\ y=y_0+tm, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=z_0+tn. \end{cases}$$

—— 也称为参数方程

当l,m,n不全为零时，在上式中消去t，可得.

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

—— 点向式.

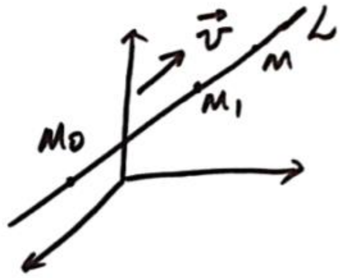
若仅有$l=0$，上式表示 $\begin{cases} x=x_0, \\ \dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}. \end{cases}$

若$l=m=0$，$n\neq0$. 上式表示 $\begin{cases} x=x_0 \\ y=y_0. \end{cases}$

· 给定直线 L 上的两点 M_0, M_1.

也可以确定 L 的直线方程.

理由: 可取 L 的方向向量 $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M_1}$.



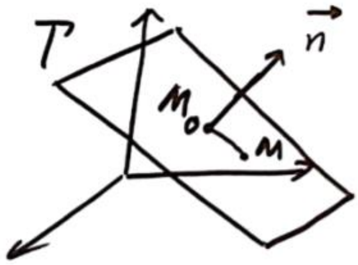
从而设 $M_0=(x_0, y_0, z_0)$, $M_1=(x_1, y_1, z_1)$.

则 $\vec{v} = (x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0)$.

从而直线 L 有如下的两点式方程:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$

3. $\mathbb{R}^3$中的平面方程



设Π为$\mathbb{R}^3$中的一个平面，为确定它的方程，有以下方法：

(a) 已知Π中的一点M_0与法向量$\vec{n}$，

此时$\forall M\in\Pi$，有 $\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$ —— 向量式方程.

设$\vec{n}=(a,b,c)$，$M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$M=(x,y,z)$，

则Π的方程可写作：

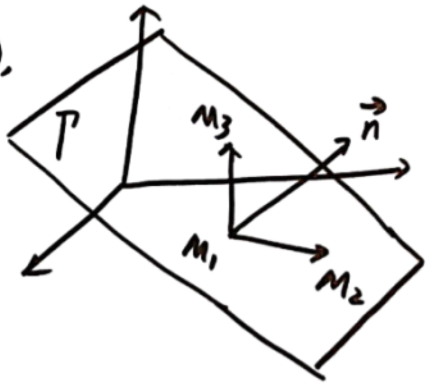
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

或 $ax+by+cz+d=0$，其中 $d=-ax_0-by_0-cz_0$

坐标形式方程

注. 垂直平面Π的直线称为Π的法线，
平行于法线的任一非零向量称为Π的法向量.

(b) 已知Π中不共线的三点$M_i(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3$.



则 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$ 是Π的一个法向量.

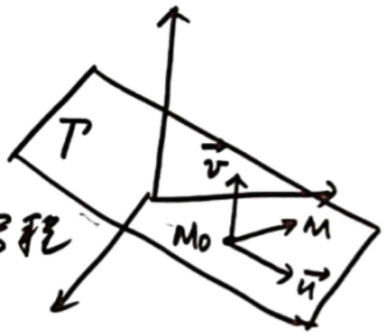
于是，$\forall M\in\Pi$，有

$$\overrightarrow{M_1M}\cdot(\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3})=0.$$

即

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z_0-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

(c) 已知向量 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 不共线，且都与平面 Π 平行，$M_0 \in \Pi$.



则 Π 的方程可写为:

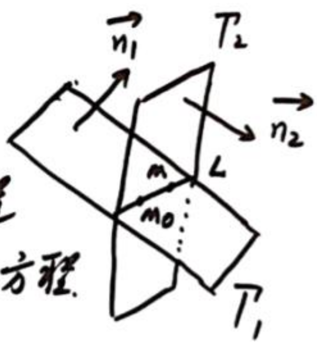
$\overrightarrow{M_0M} = s\vec{u} + t\vec{v}$, $s, t \in \mathbb{R}$ —— 参数方程

设 $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$, $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$.

则有如下方程

$$\begin{cases} x = x_0 + s a_1 + t a_2, \\ y = y_0 + s b_1 + t b_2, \\ z = z_0 + s c_1 + t c_2, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R} \text{ —— 参数方程}$$

注. 一般地，也可以将直线看作两个互不平行的平面的交线.



设平面 Π_1 和 Π_2 互不平行，则将两者方程联立，便得平面 Π_1 与 Π_2 相交的直线 L 的方程

例. 若平面 Π_1, Π_2 的方程分别为

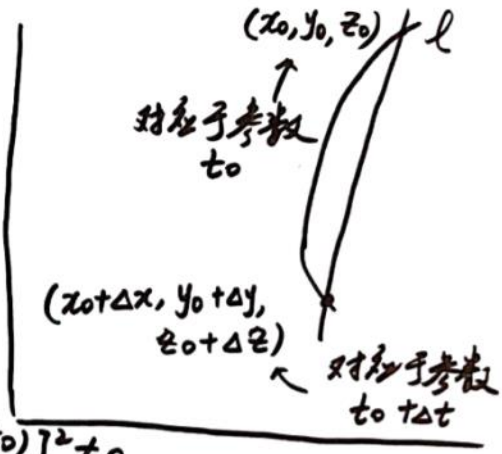
Π_1: $\vec{n_1} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$; Π_2: $\vec{n_2} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$.

则 $\begin{cases} \vec{n_1} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \\ \vec{n_2} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0 \end{cases}$ 是交线 L 的方程.

由 $\vec{n_1}$ 与 $\vec{n_2}$ 不共线，也可以得到 L 的参数方程为:

$$M = M_0 + t\, \vec{n_1} \times \vec{n_2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. 空间曲线的切线与法平面



设空间曲线 l 由连续可导的参数方程：

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$$

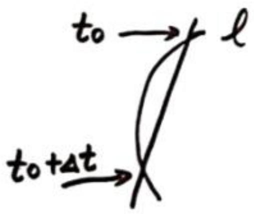
给出。$x_0 = x(t_0),\ y_0 = y(t_0),\ z = z(t_0)$，$t_0 \in [\alpha, \beta]$。设 $[x'(t_0)]^2 + [y'(t_0)]^2 + [z'(t_0)]^2 \neq 0$

则可求出 l 在点 (x_0, y_0, z_0) 的切线与法平面。

在曲线 l 上任取一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$，设它对应于参数 $t_0+\Delta t$，即：

$$\Delta x = x(t_0+\Delta t) - x(t_0),\quad \Delta y = y(t_0+\Delta t) - y(t_0),\quad \Delta z = z(t_0+\Delta t) - z(t_0)$$

过点 (x_0, y_0, z_0) 与 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y, z_0+\Delta z)$ 的直线方程为：



$$\frac{x-x_0}{\Delta x} = \frac{y-y_0}{\Delta y} = \frac{z-z_0}{\Delta z}$$

$$\Rightarrow \frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}$$

令 $\Delta t \to 0$，则 $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to x'(t_0)$，$\frac{\Delta y}{\Delta t} \to y'(t_0)$，$\frac{\Delta z}{\Delta t} \to z'(t_0)$.

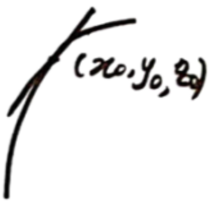
据条件，$x'(t_0)$，$y'(t_0)$，$z'(t_0)$ 不全为零.

于是切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

从而 $(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ 是切线的方向向量.

(切线方程：$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$)



过点 (x_0, y_0, z_0) 与切线正交的平面，

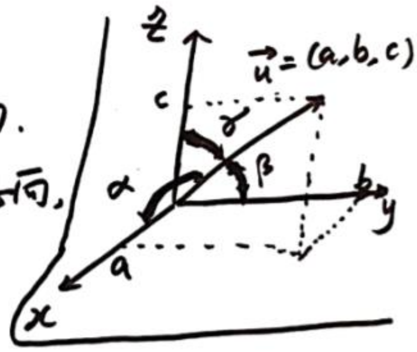
称为曲线 l 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的法平面. 其方程为：

$$x'(t_0)(x-x_0) + y'(t_0)(y-y_0) + z'(t_0)(z-z_0) = 0.$$

5. 方向余弦

$\mathbb{R}^3$中的一个非零向量$\vec{u}$称为$\mathbb{R}^3$中的一个方向.

可以证明：设α,β,γ分别是$\vec{u}$关于x轴正向，y轴正向，z轴正向所成夹角，则有

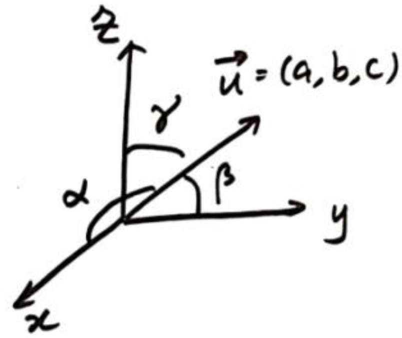


$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma). \qquad (1)$$

称$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为$\vec{u}$的方向余弦，也记作

$$\cos(\vec{u},x),\quad \cos(\vec{u},y),\quad \cos(\vec{u},z).$$

下面证明：



$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

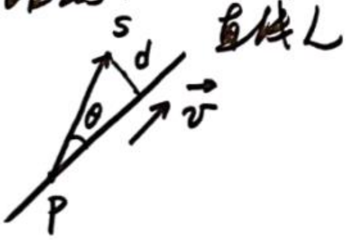
设$\vec{u}=(a,b,c)$，则

$$\cos\alpha=\frac{(1,0,0)\cdot\vec{u}}{|(1,0,0)|\cdot|\vec{u}|}=\frac{a}{|\vec{u}|},\quad \cos\beta=\frac{b}{|\vec{u}|},\quad \cos z=\frac{c}{|\vec{u}|}.$$

从而
$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\frac{(a,b,c)}{|\vec{u}|}=\left(\frac{a}{|\vec{u}|},\frac{b}{|\vec{u}|},\frac{c}{|\vec{u}|}\right)=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma).$$

6. 点到直线的距离，以及点到平面的距离.

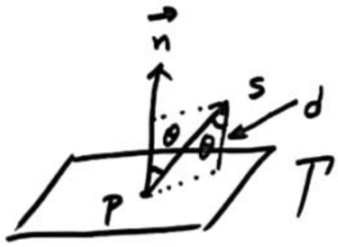
(1) 点到直线的距离



$$d = |\overrightarrow{PS}| \cdot \sin\theta$$

$$= |\overrightarrow{PS}| \cdot \frac{|\overrightarrow{PS} \times \vec{v}|}{|\overrightarrow{PS}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\overrightarrow{PS} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}.$$

(2)



$$d = |\overrightarrow{PS}| \cdot |\cos\theta|$$

$$= |\overrightarrow{PS}| \cdot \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{PS}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|\overrightarrow{PS} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$